148 — Exemples de décompositions de matrices. Applications

On désigne par K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

I Réduction de matrices

1) Trigonalisation

Définition 1. On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Proposition 2. Si $A \in M_n(K)$ est semblable à $T \in M_n(K)$ triangulaire supérieure, les termes diagonaux de T sont les valeurs propres de A.

Exemple 3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

Théorème 4. Une matrice $A \in M_n(K)$ est trigonalisable sur K si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur K.

Corollaire 5. Si K est algébriquement clos, alors toute matrice de $M_n(K)$ est trigonalisable.

Exemple 6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$.

Corollaire 6. Si $A \in M_n(K)$ est trigonalisable, la trace de A est alors égale à la somme des valeurs propres de A et le déterminant de A est égal au produit des valeurs propres de A.

Exemple 7. Faux si A n'est pas trigonalisable. Considérer $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos(\theta) & -2\sin(\theta) \\ 0 & 2\sin(\theta) & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$ avec $\theta \in]0, \pi[$.

Application 8. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si, et seulement si, $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2) Diagonalisation

Définition 9. On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 10. Si $A \in M_n(K)$ a n valeurs propres distinctes dans K, elle est alors diagonalisable.

Exemple 11. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Théorème 12. Soit $A \in M_n(K)$ de spectre $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, les λ_i étant 2 à 2 distincts. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est diagonalisable

ii) $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(A - \lambda_k I_n)$

iii) $\sum_{k=1}^{p} \dim(\ker(A - \lambda_k I_n)) = n$

iv) χ_A est scindé sur K de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dans K, chaque λ_k étant de multiplicité $\alpha_k = \dim(\ker(A - \lambda_k I_n))$

v) il existe $P \in K[X]$ scindé à racines simples annulant A.

vi) le polynôme minimal de A est scindé à racines simples dans K.

Corollaire 13. Supposons K algébriquement clos. Alors $A \in M_n(K)$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_A \wedge \chi_A' = 1$.

II Approche linéaire.

1) Avec la décomposition de Dunford.

Théorème 14 : (Dunford) DEV 1

Soit $A \in M_n(K)$ tel que le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé sur K. Il existe un unique couple $(D, N) \in (M_n(K))^2$ avec D diagonalisable et N nilpotente, tel que : (i) $A = D + N$ (ii) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A.

Exemple 15. Dans $M_2(\mathbb{R})$, on a : $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{=: D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$.

C'est la décomposition de Dunford ssi $ac = bc$.

Application 16. Pour $n \geq 2$, par densité de $D_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$, l'application $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to D_n(\mathbb{C})$, $A = D + N \mapsto D$ n'est pas continue.

Application 17 : (Dunford multiplicative)

Soit $A \in GL_n(K)$ telle que χ_A est scindé sur K. Il existe un unique couple $(D, U) \in (M_n(K))^2$ avec D inversible

IGR

ROM

GOU + BMP

ROM

BMP

ROM

et diagonalisable et U unipotente telle que $A = DU = UD$.

Théorème 18: Soit $A \in M_n(K)$ telle que χ_A est scindé sur K et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford.
On a $e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} N^k$ où q est l'indice de nilpotence de N. De plus, la décomposition de Dunford de e^A est donnée par $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$.

Corollaire 19: Soit $A \in M_n(K)$ telle que χ_A est scindé sur K.

2) Avec le théorème spectral.

Théorème 20: (Spectral)
Toute matrice symétrique réelle $A \in S_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Exemple 21: Faux dans $S_2(\mathbb{C})$. Considérer $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Application 22: Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, on a alors $\|A\| = \rho(A)$ où $\|\cdot\|$ est la norme matricielle induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et ρ le rayon spectral de A.

Proposition 23: Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A$.

Théorème 24: (Décomposition polaire) DEV 2.
Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$. De plus, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, la décomposition précédente est unique.

Application 25: (admis)
L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$.

III Approche algorithmique

1) Méthode du pivot de Gauss

Définition 26: Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1.
On appelle matrice de transvection une matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$, avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in K$.
On appelle matrice de dilatation une matrice de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{ii}$, avec $1 \leq i \leq n$ et $\lambda \in K^*$.

Proposition 27: (Opérations élémentaires)
- La multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i (resp. la colonne i) par λ.
- La multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$ (resp. la colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$)

Théorème 28: Une opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire $Ax = b$ le transforme en un système équivalent.

Exemple 29:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

2) Factorisation LU

Théorème 30: Une matrice $A \in GL_n(K)$ admet une décomposition $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une matrice triangulaire supérieure si, et seulement si, tous les déterminants principaux de A sont non-nuls.

Lorsqu'elle existe, une telle décomposition est unique.

Exemple 31 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}$

Remarque 32 : L'intérêt de cette décomposition est la résolution de système $Ax = b$. Si $A = LU$, alors $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$. En posant $y = Ux$, on résout $Ly = b$ (par principe de descente) puis on résout $y = Ux$ (par principe de remontée).

ROM

Corollaire 33 : Soit $A \in GL_n(K) \cap S_n(K)$ avec tous ses déterminants principaux non-nuls. Il existe L triangulaire inférieure à diagonale unité et D diagonale telle que $A = LD{}^tL$.

Application 34 : (Factorisation de Cholesky)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors A est symétrique définie positive si, et seulement si, il existe B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B^t B$.

De plus, si les coefficients diagonaux de B sont positifs, la décomposition est unique.

BMP	Beck, Malick, Peyré	Objectif Agrégation.
		Algèbre.
COU	Gourdon	
ISE	Isenmann	L'oral à l'agreg de math.
ROM	Rombaldi	Algèbre et géométrie.